Урок 13

Емкость 2

1. (Задача 2.13) Внутри сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b диэлектрическая проницаемость меняется по закону

$$\varepsilon\left(r\right)=\begin{cases}\varepsilon_1=\mathrm{const} & \text{при } a\le r<c\\ \varepsilon_2=\mathrm{const} & \text{при } c\le r\le b\end{cases},$$

где $a<c<b$. Найти емкость конденсатора, распределение зарядов $\sigma_{\text{связ}}$ и полный связанный заряд в диэлектрике.

Решение Очевидно, что система представляет собой два последовательно соединенных сферических конденсатора. Полная емкость последовательно соединенных конденсаторов определяется соотношением

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_{a-c}}+\frac{1}{C_{c-b}}.$$

Для нахождения емкости одного сферического конденсатора рассмотрим 2 вложенные одну в другую концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2, $(R_1<R_2)$. Пространство между ними заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Предположим, что вектор электростатической индукции $\mathbf{D}$ в шаровом слое между обкладками имеет только радиальную компоненту (в силу сферической симметрии задачи), и она выражается в виде

$$D=\frac{aQ_1}{r^2},$$

где Q_1— заряд внутренней обкладки. Граничное условие на границе радиуса R_1 можно рассматривать как следствие теоремы Гаусса.

$$D_{1n}=D|_{r=R_1}=4\pi\sigma=\frac{Q_1}{R_1^2},$$

откуда следует $a=1$. Таким образом, в зазоре между сферическими поверхностями

$$D=\frac{Q_1}{r^2},\quad E=\frac{Q_1}{\varepsilon r^2}.$$

Разность потенциалов между обкладками равна

$$\Delta\varphi=\int\limits_{R_1}^{R_2}E\mathrm{d}r=\frac{Q_1}{\varepsilon}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{Q_1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Таким образом, емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{Q_1}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}.$$

Откуда получаем емкость 2-х последовательно соединенных конденсаторов

$$C = \left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}.$$

Распределение связанных зарядов получается из описанного выше решения с учетом того, что $D = \frac{Q_1}{r^2}$ во всем пространстве между обкладками, а электрическое поле в области $a < r < cE = D/\varepsilon_1$, а в области $< r < E = D/\varepsilon_2$. Тогда

$$\sigma_{\text{связ}}(a) = \frac{E_{1n} - D_{1n}}{4\pi} = -\frac{Q_1}{4\pi a^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right),$$
$$\sigma_{\text{связ}}(c) = \frac{E_{c+} - E_{c-}}{4\pi} = \frac{Q_1}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right),$$
$$\sigma_{\text{связ}}(b) = \frac{Q_1}{4\pi b^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right).$$

где Q_1 — заряд внутренней обкладки.

2. (Задача 2.14) Пространство между обкладками сферического конденсатора частично заполнено диэлектриком, расположенным внутри телесного угла Ω с вершиной в центре обкладок. Радиусы обкладок — a и b, проницаемость диэлектрика — ε. Найти емкость конденсатора.

Решение 1. Емкость составного сферического конденсатора представляет собой емкость 2-х параллельно соединенных конденсаторов. (Подумайте, как это можно доказать). Тогда

$$C = C_1 + C_2.$$

$$C = \frac{ab}{b-a}\left\{\frac{S_{\text{сферы}} - S_{\text{угл.}}}{S_{\text{сферы}}} + \varepsilon\frac{S_{\text{угл.}}}{S_{\text{сферы}}}\right\} = \frac{ab}{b-a}\left\{1 - \frac{\Omega}{4\pi} + \varepsilon\frac{\Omega}{4\pi}\right\}$$
$$= \frac{ab}{b-a}\left\{1 - \frac{\Omega}{4\pi}\left[1 - \varepsilon\right]\right\}.$$

3. (Задача 2.15) Найти взаимную емкость двух шаров радиуса a, если расстояние между их центрами равно $b \gg 2a$.

Решение Для поиска взаимной емкости необходимо поместить на каждый из шаров одинаковый (по модулю) заряд и посчитать емкость полученного "конденсатора". Пусть $q_1 = -q_2$. Тогда потенциалы на поверхности первого и второго шаров соответственно

$$\varphi_1 = q_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} \right),$$
$$\varphi_2 = q_1 \left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{a} \right).$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2q_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} \right) = 2q_1 \frac{b-2a}{a\,(b-a)}$$

$$C = \frac{q_1}{\Delta\varphi} = \frac{a}{2} \frac{b-a}{b-2a}$$

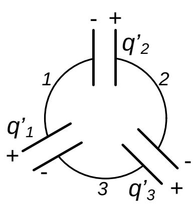
Поскольку $b \gg 2a$

$$C \simeq \frac{a}{2}(1 + \frac{a}{b}).$$

4. (Задача 2.19) Внутри плоского конденсатора, заряженного до напряжения U, на расстоянии h от одной из пластин находится маленький металлический шарик радиуса r. Пренебрегая искажением поля конденсатора, найти заряд, появившийся на шарике, если соединить его с пластиной с нулевым потенциалом. Расстояние между пластинами d.

Решение $Q = -Uhr/d.$

5. (Задача 2.21) Трем одинаковым изолированным конденсаторам емкостью C были сообщены заряды q_1, q_2, q_3 соответственно. Потом конденсаторы соединили. Найти величины зарядов, оставшихся на конденсаторах.



Решение Пусть на конденсаторах после соединения появятся заряды как это показано на рисунке. Если знаки определены неверно, то после решения соответствующие заряды будут другого знака.Обозначим разность потенциалов между конденсатором 1 и 3 как φ_{13}. Тогда для конденсатора с зарядом q'_1 можно записать $\varphi_{13} = \frac{q'_1}{C}$, где C — емкость конденсатора. С другой стороны, при обходе этого контура в противоположном направлении сумма падений потенциалов $\varphi_{13} = \varphi_{12} + \varphi_{23} =$, а они в свою очередь из-за одинаковых емкостей могут быть записаны как

$$\varphi_{13} = -\frac{q'_2}{C} - \frac{q'_3}{C}.$$

Знак минус в этом уравнении связан с тем, что потенциал при переходе от положительной пластины к отрицательной убывает, а при обратном направлении возрастает. Приравнивая два выражения для φ_{13} получим

$$q_1' + q_2' + q_3' = 0.$$

Теперь рассмотрим сохранение зарядов на каждом участке. При соединении конденсатора 1 и 2 сумма зарядов, которая была на этих пластинах сохранилась и поэтому можно записать

$$\left.\begin{array}{l} q_1 - q_2 = q_1' - q_2' \\ q_2 - q_3 = q_2' - q_3' \end{array}\right\}$$

Решив систему из трех уравнений, получим

$$q_i' = q_i - \bar{q}, \quad \text{где} \quad \bar{q} = \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + q_3).$$