

Лекция 8. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

План

1. Введение.
2. Переходный процесс в последовательном колебательном контуре – реакция при нулевом входе.
3. Подключение последовательного колебательного контура к источнику постоянного напряжения.
4. Переходные процессы в параллельном колебательном контуре.
5. Выводы.

1. Введение

До сих пор мы рассматривали процессы в цепях с одним индуктивным или емкостным элементом. Поведение таких цепей описывается дифференциальным уравнением первого порядка. Рассмотрим теперь цепи, которые содержат одновременно индуктивный и емкостный элементы. Процессы в таких цепях описываются уравнением второго порядка. Соответственно, их называют цепями второго порядка. Простейшими примерами цепей второго порядка являются последовательный и параллельный колебательные контуры.

Переходные процессы в цепях второго порядка существенным образом зависят от вида корней характеристического уравнения. Последние определяются конфигурацией цепи и значениями элементов и могут быть вещественными или комплексно сопряженными.

2. Переходный процесс в последовательном колебательном контуре – реакция при нулевом входе

Рассмотрим последовательную RLC -цепь, которая не содержит независимых источников (рис. 8.1). Будем считать, что емкостный элемент заряжен до напряжения $u_C(0) = U_0$, а начальный ток индуктивного элемента $i_L(0) = 0$. Поскольку независимые источники в цепи отсутствуют, токи и напряжения в такой цепи являются реакцией при нулевом входном сигнале (*реакцией при нулевом входе*).

В соответствии со вторым законом Кирхгофа

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0.$$

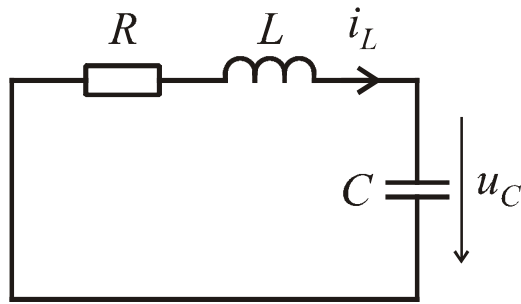


Рис. 8.1

Продифференцировав обе части уравнения по времени, получаем

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (8.1)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0.$$

Здесь $\alpha = R/2L$ – постоянная затухания или коэффициент демпфирования;
 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – частота собственных колебаний цепи.

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}.$$

Каждый из корней дает независимое решение, поэтому решение дифференциального уравнения (8.1) имеет вид

$$i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (8.2)$$

Постоянные A_1 и A_2 определим, записав выражения для $i(t)$ и $\frac{di(t)}{dt}$ в момент времени $t = 0+$:

$$i(0) = A_1 + A_2; \quad (8.3)$$

$$\frac{di(0_+)}{dt} = p_1 A_1 + p_2 A_2. \quad (8.4)$$

Для определения постоянных A_1 и A_2 необходимо знать начальные условия: значение тока и его первой производной при $t = 0+$.

Примем начальный ток индуктивного элемента равным нулю, а начальное напряжение емкостного элемента $u_C(0) = U_0$. Учитывая, что

$$\frac{di(0_+)}{dt} = \frac{u_L(0_+)}{L},$$

найдем первую производную тока при $t = 0+$:

$$\frac{di(0_+)}{dt} = -\frac{U_0}{L}.$$

Решая уравнения (8.3) (8.4), найдем постоянные интегрирования

$$A_1 = -A_2 = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}.$$

Форма переходных токов и напряжений зависит от вида корней характеристического уравнения. Рассмотрим важные для практики случаи.

Случай 1. Корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные ($\alpha > \omega_0 > 0$).

В соответствии с (8.2) ток в цепи

$$i_L(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (8.5)$$

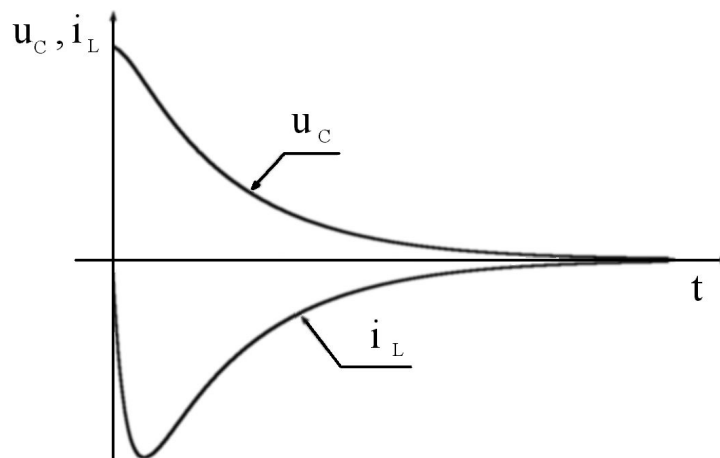


Рис. 8.2

Аналогичным образом можно найти закон изменения напряжения емкостного элемента $u_c(t)$. Графики $i(t)$ и $u_c(t)$ показаны на рис. 8.2.

Итак, при вещественных корнях характеристического уравнения токи и напряжения изменяются неперiodически. Такой переходный процесс называют *апериодическим*.

Случай 2. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные: $p_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Здесь $j = \sqrt{-1}$.

В соответствии с (8.2) ток

$$i_L(t) = -\frac{U_0 e^{\alpha t}}{j2\beta L} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) = -\frac{U_0}{\beta L} e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

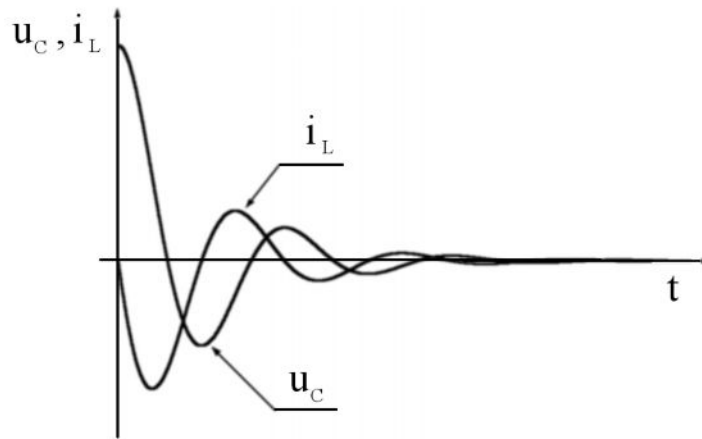


Рис. 8.3

Таким образом, если собственные частоты комплексные, в цепи возникают синусоидальные колебания, затухающие с течением времени (если $\alpha < 0$). Такой переходный процесс называют *колебательным*. Графики тока $i(t)$ и напряжения $u_c(t)$ для случая комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения показаны на рис. 8.3.

3. Подключение последовательного колебательного контура к источнику постоянного напряжения

Рассмотрим процессы в последовательном колебательном контуре, показанном на рис. 8.4. На входе цепи в момент $t = 0$ включается источник постоянного напряжения E .

Для цепи на рис. 8.4 справедливо уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E. \quad (8.6)$$

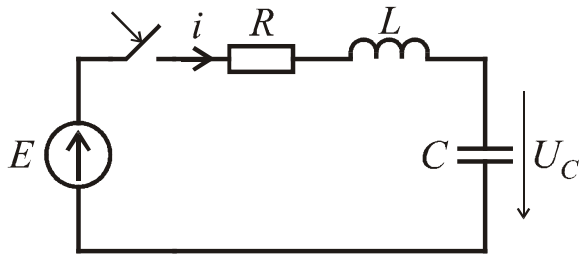


Рис. 8.4

Примем, что независимые начальные условия нулевые, т.е. $u_C(0) = 0$, $i_L(0) = 0$.

Продифференцировав левую и правую части (8.6), получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0.$$

Постоянная затухания $\alpha = R/2L$. Частота собственных колебаний $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}.$$

Решение уравнения (8.6) представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + i(\infty). \quad (8.7)$$

Поскольку в цепи действует источник постоянного напряжения, принужденная составляющая тока $i(\infty) = 0$.

Постоянные A_1 и A_2 определим, записав выражения для $i(t)$ и $\frac{di(t)}{dt}$ в момент времени $t = 0+$:

$$i(0) = A_1 + A_2 = 0; \quad \frac{di(0_+)}{dt} = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E}{L}.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$i_L(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (8.8)$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения переходный процесс будет иметь аperiodический или колебательный характер.

4. Переходный процесс в параллельном колебательном контуре

Рассмотрим процессы в параллельном колебательном контуре, показанном на рис. 8.5. На входе цепи в момент $t = 0$ включается источник постоянного тока J .

Для рассматриваемой цепи справедливо дифференциальное уравнение

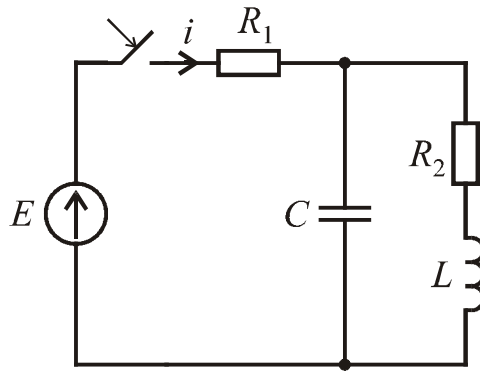


Рис. 8.5

Соответствующее однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = 0. \quad (8.9)$$

Здесь постоянная затухания

$$\alpha = -(a_{11} + a_{22})/2 = \frac{1}{2} \left(\frac{L + R_1 R_2 C}{R_1 C L} \right);$$

частота собственных колебаний

$$\omega_0^2 = (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) = \frac{R_1 + R_2}{R_1 L C}.$$

Характеристический полином, соответствующий уравнению (8.9):

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

В зависимости от соотношения номиналов элементов корни характеристического уравнения могут быть вещественными или комплексно-сопряженными.

Решение уравнения (8.1) представим в следующем виде

$$u_c(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + u_c(\infty). \quad (8.10)$$

Здесь $u_c(\infty)$ – принужденная составляющая напряжения $u_c(t)$:

$$u_c(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E.$$

Постоянные A_1 и A_2 определим, записав выражения для $u_c(t)$ и $\frac{du_c(t)}{dt}$ в момент времени $t = 0_+$:

$$u_c(0) = A_1 + A_2 + u_c(\infty);$$

$$\frac{du_c(0_+)}{dt} = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Производная $\frac{du_c(0_+)}{dt} = \frac{i_c(0_+)}{C}$. Начальное значение тока $i_c(0_+)$ найдем, анализируя цепь на рис. 8.5 в момент времени $t = 0_+$. При нулевых начальных условиях ($u_c(0) = 0$, $i_L(0) = 0$)

$$i_c(0_+) = \frac{E - u_c(0)}{R_1} + i_L(0) = \frac{E}{R_1}.$$

Итак, постоянные интегрирования A_1 и A_2 найдем, решая систему уравнений:

$$A_1 + A_2 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 0 \quad (8.11)$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E}{R_1 C}. \quad (8.12)$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения переходный процесс будет иметь апериодический или колебательный характер. Аналогичным образом можно найти закон изменения тока индуктивного элемента $i_L(t)$.

5. Выводы

1. Переходные процессы в цепях второго порядка, содержащих индуктивный и емкостный элементы, существенным образом зависят от вида корней характеристического уравнения. Последние определяются конфигурацией цепи и значениями элементов и могут быть вещественными или комплексно сопряженными.
2. Простейшими цепями второго порядка являются последовательный и параллельный колебательные контуры.
3. В случае, если корней характеристического уравнения вещественные, переходный процесс в цепи второго порядка имеет апериодический характер.
4. Если корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, переходный процесс имеет колебательный характер.